Advances in Dynamical Systems and Applications.
ISSN 0973-5321 Volume 1 Number 1 (2006), pp. 59–77

http://www.ripublication.com/adsa.htm

Les Déterminants Généralisés de Cauchy

Thomas Ernst
Department of Mathematics, Uppsala University,
P.O. Box 480, SE-751 06 Uppsala, Sweden
E-mail: Thomas.Ernst@math.uu.se

Abstract

L'objet de cet article est de présenter une expression nouvelle du déterminant généralisé de Cauchy, donc de la fonction de Schur. Nous obtenons aussi une relation d'équivalence de la quantité de tous les déterminants généralisés de Cauchy.

The purpose of this paper is to present a new expression for the generalized Cauchy determinant, and thus for the Schur function. We also obtain an equivalence relation on the set of all generalized Cauchy determinants.

AMS subject classification: 15A15, 20C30.
Les mots clés: Les déterminants généralisés de Cauchy, la fonction de Schur, relation d'équivalence, les polynômes anti-symétriques.

1. Introduction

Cet article est organisé comme suit: Dans le chapitre présent nous offrons l'histoire générale. Dans le deuxième chapitre nous donnons les définitions importantes qui sont employées dans les chapitres suivants. Nous démontrons dans le troisème chapitre un déterminant généralisé de Cauchy [2] (abrégé dès maintenant comme DGC) avec $\lambda_1 = 2$ sous forme des polynômes symétriques élémentaires e_n. Nous démontrons dans le quatrième chapitre une expression d'un DGC arbitraire, et enfin dans le cinquième chapitre nous discutons la relation entre les résultats nouveaux et les travaux précédents.

L'origine des déterminants provient de Leibniz (1646–1716), et leurs caractères étaient développés, entre autres, par Vandermonde (1735–96), Lagrange (1736–1813), Laplace (1749–1827), Cauchy (1789–1857), tandis que les matrices générales n'étaient pas introduites qu'après la mort de Cauchy, par Cayley (1821–95). Gauss (1777–1855) était la première personne qui ait introduit le nom déterminant en science dans son

Received March 27, 2006; Accepted August 8, 2006

ouvrage classique, Recherches arithmétiques, 1807. Les propositions de Lagrange et Gauss étaient développées par Binet (1786–1856), mais la généralisation de ces propositions provient de Cauchy, présentée pour une publication en 1812 et publiée dans le Journal de l'École polytechnique [2] 1815. La primière référence aux fonctions de Schur se trouve dans cet article de Cauchy.

Cauchy fut né à Paris en l'année de la Révolution française, et son père, qui craignait pour sa vie, s'établit à Arcueil avec sa famille. Mais bientôt il revenait à Paris. Laplace et Lagrange étaient des amis de la famille. Cauchy fut très renommé pour ses nombreux travaux de mathématiques importants, par example son œuvre en 4 volumes, Exercises d'analyse et de physique mathématique 1840–47. Plusieurs termes en mathématique portent le nom de Cauchy.

Après Cauchy, Jacobi (1804–51) fondait une théorie des déterminants dans son traité de 1841. A Königsberg, où Jacobi demeurait pendant 1826–43, il avait un élève italien, Trudi, qui dévelopait les théories de Jacobi et donnait une preuve complète d'identité de Jacobi–Trudi [30]. Von Nägelsbach et Kostka développaient encore les théories de Jacobi et Trudi. Brioschi (1825–97), aussi un Italien, écrivait un livre scolaire sur la théorie des déterminants, qui fut traduit en allemand et en français.

Le DGC est intimement lié aux groupes symétriques et à la partition comme c'est présenté dans [17].

Une partition [17] de $\eta \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante finie

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{1.1}$$

d'entiers non nuls

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots, \geq \lambda_n \geq 0,$$

où le poids de λ

$$\eta = \sum_{j=1}^{l(\lambda)} \lambda_j, \tag{1.2}$$

et $l(\lambda)$, le nombre des parts > 0 de λ, s'appelle le longeur de λ.

Nous trouverons bon de ne pas distinguer entre deux suites qui sont seulement différentes par une suite de zéros au bout.

Définition 1.1. Soit $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur des exposants, nous définissons

$$|\epsilon| = \begin{vmatrix} x_1^{\epsilon_n} & \vdots & x_n^{\epsilon_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\epsilon_1} & \vdots & x_n^{\epsilon_1} \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Il y a beaucoup de définitions de DGC, et dans nos calculs nous emploieront la définition par Heineman [11, p. 465], qui est comme suit. Cette notation est une certaine variation minimale de la notation $a_{\lambda+\delta}$ par Macdonald [17].

Définition 1.2. Étant données les partitions $\lambda : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n = 0$ de η et $\delta : (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ de $\binom{n}{2}$, le DGC est défini par

$$|\lambda + \delta|. \tag{1.4}$$

La fonctions de Schur s_λ, définie par

$$s_\lambda = \frac{|\lambda + \delta|}{|\delta|}, \tag{1.5}$$

est un quotient de deux polynômes anti-symétriques homogènes, et un polynôme symétriques homogène [17].

Les fonctions de Schur sont aussi traitées, mais d'un autre point de vue, dans [19, p. 331].

Les fonctions de Schur ont beaucoup d'applications et nous donnons un resumé bref.

Les fonctions de Schur sont particulierement applicables aux discussions sur l'effet Hall quantiques [25, 28]; aux caractères de représentations irréductibles de $U(n)$ [34, p. 213], [28]; aux caractères de $Gl(n, \mathbb{C})$, qui peuvent être exprimés sous forme des fonctions de Schur [24], [1, p. 237], [33, ch. VII.6]; aux caractères de $Sp(2n+1, \mathbb{C})$ [18]; aux caractères de $Sp(2n, \mathbb{R})$ [10]; et aux caractères d'algèbre simples de Lie $sl(n, \mathbb{C})$ et $su(n)$, qui ont les même représentations [7].

Les fonctions de Schur ont été résemment employées dans le calcul q [14, 23]. Les déterminants de Cauchy ont aussi été appliqués dans l'analyse numérique [3, 13]. De plus, DGC se trouve dans la théorie de Sato, ou les variables sont des opérateurs partiels différentiels [4, 21].

Une formule pour la fonction de Schur est donnée par la formule des caractères de Frobenius [26].

Théorème 1.3. Soit l'ordre du centralisateur d'une permutation quelconque $\in \mu$ [8] donnée par

$$c_\mu = \prod_{j=1}^{\eta} \mu_j!\, j^{\mu_j}. \tag{1.6}$$

Soit

$$S_\mu = \prod_{j=1}^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^j \right)^{\mu_j}. \tag{1.7}$$

Soit S_η^* l'ensemble de toutes les classes de conjugaison de S_η. Donc pour chaque λ,

$$s_\lambda = \sum_{\mu \in S_\eta^*} \left(\chi_\lambda(\mu) c_\mu^{-1} S_\mu \right). \tag{1.8}$$

2. Les Préliminaires

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions importantes. Dans tout l'article, $\widehat{}$ avec un indice inférieur signifie que ce indice inférieur est supprimé.

Définition 2.1. La notation suivante sera employée.

$$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N),\ 1 \leq k_j \leq n, 1 \leq j \leq N. \tag{2.1}$$

Nous faisons la convention que les produits vides sont interprétés comme 1, et les sommes vides sont interprétés comme 0. Le nombre de variables est désigné par n, commes dans (1.3). Cependant, le n dans la Définition 2.2 soit interprété commes le nombre temporaire des variables. Un exemple est (4.10), où le nombre temporaire des variables est $n+\sigma-1-m$, ce qui est évident du contexte.

Nous emploieront la notation suivante pour un déterminant de Cauchy, où les variables avec indice dans $\mathbf{k}$ manquent.

Définition 2.2.

$$|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}| = \prod_{\substack{1\leq j<i\leq n,\\ i,j\neq\{\mathbf{k}\}}} (x_i - x_j). \tag{2.2}$$

Définition 2.3. Le nombre des exposants manquant dans un DGC est $s = \lambda_1$. Soit C désigner l'opérateur complémentaire dans

$$\{1, \ldots, n+s-2\}.$$

Donc les exposants manquant dans un DGC sont les exposants

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}(\lambda) = (l_1, \cdots, l_s) = (\lambda+\delta)^C,\ 0 < l_1 < \ldots < l_s < n+s-1. \tag{2.3}$$

Inversement, donnée une suite des exposants manquant, $\lambda(\mathbf{l})$ est défini comme l'inverse de $\mathbf{l}(\lambda)$.

Pour connaître les exposants manquants nous emploierons à la fois λ et $\mathbf{l}$ pour charactériser $|\lambda+\delta|$. Le $\mathbf{l}$ est utilisable quand $\lambda+\delta$ contient beaucoup d'exposants manquants.

Donné $\mathbf{l}$, nous pouvons définir un DGC comme dans la Définition 1.2. Nous emploierons $\lambda(\mathbf{l})$ comme plus haut. Désignons

$$|\widehat{\epsilon_{l_1,\ldots,l_s}}| = |\lambda(\mathbf{l}) + \delta|. \tag{2.4}$$

Le théorème fondamental suivant [11, p. 466] a été connu il y a plusieurs années.

Théorème 2.4. Soit λ la partition de $n - l_1$ où

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-l_1} = 1,\ \lambda_{n-l_1+1} = 0,\ l_1 < n.$$

Donc
$$|\widehat{\epsilon_{l_1}|} = |\delta| e_{n-l_1}(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.5}$$

Maintenant, nous définirons quelques nombres qui seront employés entièrement dans cet article:

Définition 2.5. Admettons que λ et les DGC correspondants sont donnés. Mettons

$$N = l_{s-1} - s + 2,\ u = \lambda_1 - 2. \tag{2.6}$$

Soit $\{b_{j,N,u}\}_{j=1}^{N}$ des nombres naturels, donnés récursif par

$$b_{j,N,u} = \min(\lambda_{n-j} + 1 - \lambda_{n-j+1}, u + 1 - \sum_{k=1}^{j-1}(b_{k,N,u} - 1)), j = 1, \ldots, N-1, \tag{2.7}$$

$$b_{N,N,u} = \min(\lambda_{n-N} + 1 - \lambda_{n-N+1}, u + 2 - \sum_{k=1}^{N-1}(b_{k,N,u} - 1)). \tag{2.8}$$

La cause du $u+2$ dans la formule seconde est que le dernier facteur dans le Théorème 3.5 contient un carré.

Donc les $b_{j,N,u}$ satisfont

$$b_{N,N,u} - 2 + \sum_{j=1}^{N-1}(b_{j,N,u} - 1) = u. \tag{2.9}$$

Ces nombres satisfont aussi les inégalités

$$b_{j,N,u} \geq 1,\ 1 \leq j \leq N-1;\ b_{N,N,u} \geq 2. \tag{2.10}$$

De fait, la valeur maximale de $b_{j,N,u}$ est égale aux bonds dans les degrés (pour $j = 1, \ldots, N$) du DGC, comme l'équation suivante montre:

$$\max(b_{j,N,u}) = \lambda_{n-j} + 1 - \lambda_{n-j+1},\ j = 1, \ldots, N. \tag{2.11}$$

Pour $u = 0$ nous obtenons

$$b_{j,N,0} = 1,\ j = 1, \ldots, N-1,\ b_{N,N,0} = 2. \tag{2.12}$$

Plus tard, nous donnerons quelques exemples de la manière de calculer le $b_{j,N,u}$.

Les nombres suivants seront employés pour connaître le signe des permutations. Puisque ces nombres se trouvent seulement comme un signe de plus ou un signe de moins, c'est suffisant de les calculer mod 2.

Définition 2.6. Soit $I(\pi)_N$ le nombre des inversions mod 2 de la permutation [9] $\pi = (k_1, \ldots, k_N)$.

La notation suivante sera employées dans cet article:

Définition 2.7.

$$\left(x_1 \dots \prod_{i=1}^{j} \widehat{x_{k_i}} \dots x_n\right) = \frac{x_1 \dots x_n}{\prod_{i=1}^{j} x_{k_i}} \tag{2.13}$$

Afin de simplifier la notation, nous introduisons la fonction suivante $\Theta_\lambda(e)$.

Définition 2.8. Soit $0 < l_1 < \cdots < l_s < n+s-1$, et soit λ la partition correspondante.

Pour plus de commodité, nous mettons

$$N = l_{s-1} - s + 2. \tag{2.14}$$

Soit $U_{n,N}$ le sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}^N$, où aucune répétition n'est permise. Donc, la function $\Theta_\lambda(e) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(e) = (-1)^{\binom{N+1}{2}} \sum_{\mathbf{k} \in U_{n,N}} \prod_{j=1}^{N} \left(x_1 \dots \prod_{i=1}^{j} \widehat{x_{k_i}} \dots x_n\right)^{b_{j,N,s-2}} \times \\ \times e_{n-l_s+s-1}(x_1, \dots, \widehat{x_{k_1}}, \dots, \widehat{x_{k_N}}, \dots, x_n) \times \\ \times (-1)^{k_1+\dots+k_N+I(\pi)_N} |\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Plus tard, nous verrons que la fonction (2.15) est un polynôme anti-symétrique de degré homogène $\binom{n+s}{2} - \sum_{j=1}^{s} l_j$.

Définition 2.9. Pour le cas spécial $s = 2$, si l_1 et l_2 sont donnés, $\lambda(l)$ est défini. Pour ce λ, soit $\theta(n, l_1, l_2)$ le $\Theta_\lambda(e)$ comme défini dans (2.15).

Nous donnons quelques exemples.

Exemple 2.10.

$$\text{Polya, Szegö [22, p. 99]} \quad \theta(n, 0, l_2) = |\delta| x_1 \dots x_n e_{n-l_2+1}(x_1, \dots, x_n); \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \theta(n, 1, l_2) = -\sum_{k_1=1}^{n} (-1)^{k_1} (x_1 \dots \widehat{x_{k_1}} \dots x_n)^2 \times \\ \times |\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}| e_{n-l_2+1}(x_1, \dots, \widehat{x_{k_1}}, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Si $\lambda = (3, 3, 0, 0, 0)$,

$$\begin{aligned}\Theta_\lambda(e) = \sum_{k_1=1}^{5} \sum_{k_2=1, k_2\neq k_1}^{5} \sum_{k_3=1, k_3\neq k_1, k_3\neq k_2}^{5} \left(x_1 \ldots \prod_{i=1}^{1} \widehat{x_{k_i}} \ldots x_5 \right) \\ \times \left(x_1 \ldots \prod_{i=1}^{2} \widehat{x_{k_i}} \ldots x_5 \right) \left(x_1 \ldots \prod_{i=1}^{3} \widehat{x_{k_i}} \ldots x_5 \right)^3 \\ \times e_2 \left(x_1, \ldots, \widehat{x_{k_1}}, \ldots, \widehat{x_{k_3}}, \ldots, x_5 \right) (-1)^{k_1+\ldots+k_3+I(\pi)_3} |\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|.\end{aligned} \tag{2.18}$$

3. Le cas $\lambda_1 = 2$

Dans ce chapitre, nous démontrons une équation générale pour un DGC avec $\lambda_1 = 2$ sous forme de polynômes symétriques élémentaires e_n. Développons le déterminant

$$\Xi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ y & x_1 & \cdots & x_n & z \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y^{n+1} & x_1^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} & z^{n+1} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

par rapport à la colonne $n + 2$.

Définition 3.1. Les sous-déterminants $\{\Xi_l\}_{l=0}^{n+1}$ sont définis par

$$\Xi = \sum_{l=0}^{n+1} z^l (-1)^{l+n+1} \Xi_l. \tag{3.2}$$

Le y et z dans (3.1) sont des variables liées, et sont employées dans les calculs. Les x_j sont des variables qui entreront dans les DGC.

Commençant avec (2.5), la stratégie dans ce chapitre est d'exprimer ces sous-déterminants de deux manières afin d'obtenir une équation qui donne une expression des DGC sous forme des sommes multiples des polynômes symétriques élémentaires. Nous obtenons au début

Théorème 3.2. Soit $2 \leq l_2 \leq n + 1$. Donc

$$|\widehat{\epsilon_{1,l_2}}| = \theta(n, 1, l_2). \tag{3.3}$$

Preuve. D'abord, notre objet est de développer Ξ_1 par rapport à la ligne 1, et puis de développer tous les sous-déterminants sauf le premier par rapport à la colonne 1 et d'employer (2.5).

$$
\begin{aligned}
&\Xi_1 = |\delta|(x_1\dots x_n)^2 + \\
&+\sum_{k_1=1}^{n}(-1)^{k_1}\begin{vmatrix} y^2 & x_1^2 & \cdots & \widehat{x_{k_1}^2} & \cdots & x_n^2 \\ y^3 & x_1^3 & \cdots & \widehat{x_{k_1}^3} & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{n+1} & x_1^{n+1} & \cdots & \widehat{x_{k_1}^{n+1}} & \cdots & x_n^{n+1} \end{vmatrix} = \\
&= |\delta|(x_1\dots x_n)^2 + \sum_{k_1=1}^{n}(x_1\dots \widehat{x_{k_1}}\dots x_n)^2 \times \\
&\times \sum_{l_2=2}^{n+1}(-1)^{l_2+k_1}y^{l_2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \widehat{1} & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & \widehat{x_{k_1}} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & \widehat{x_{k_1}^2} & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l_2-2}} & \cdots & \widehat{x_{k_1}^{l_2-2}} & \cdots & \widehat{x_n^{l_2-2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & \widehat{x_{k_1}^{n-1}} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\
&\overset{(2.5)}{=} |\delta|(x_1\dots x_n)^2 + \sum_{l_2=2}^{n+1}\sum_{k_1=1}^{n} y^{l_2} e_{n-l_2+1}(x_1,\dots,\widehat{x_{k_1}},\dots,x_n) \\
&(-1)^{k_1+l_2}(x_1\dots\widehat{x_{k_1}}\dots x_n)^2|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Maintenant, développons Ξ_1 par rapport à la colonne 1.

$$
\Xi_1 = |\delta|(x_1\dots x_n)^2 + \sum_{l_2=2}^{n+1}(-1)^{l_2+1}y^{l_2}|\widehat{\epsilon_{1,l_2}}|. \tag{3.5}
$$

Enfin, égalisons les coefficients de y^{l_2}. ■

Théorème 3.3. Soit $3 \le l_2 \le n+1$. Donc

$$
|\widehat{\epsilon_{2,l_2}}| = \theta(n,2,l_2). \tag{3.6}
$$

Preuve. Développons Ξ_2 par rapport à la ligne 1 et développons le dernier déterminant par rapport à la colonne 1. Employons (2.5) et (3.3).

$$
\begin{aligned}
&\Xi_2 = |\delta| x_1 \ldots x_n e_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) + y\sum_{k_1=1}^{n}(x_1\ldots\widehat{x_{k_1}}\ldots x_n)^3|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|(-1)^{k_1}+\\
&+\sum_{l=3}^{n+1} y^l \sum_{k_1=1}^{n}(-1)^{k_1+l}\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & \widehat{x_{k_1}} & \cdots & x_n\\ x_1^3 & \cdots & \widehat{x_{k_1}}^3 & \cdots & x_n^3\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{x_1^l} & \cdots & \widehat{x_{k_1}^l} & \cdots & \widehat{x_n^l}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots\\ x_1^{n+1} & \cdots & \widehat{x_{k_1}^{n+1}} & \cdots & x_n^{n+1}\end{vmatrix} =\\
&|\delta| x_1 \ldots x_n e_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) + y\sum_{k_1=1}^{n}(x_1\ldots\widehat{x_{k_1}}\ldots x_n)^3|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|(-1)^{k_1}+\\
&+\sum_{l=3}^{n+1} y^l \sum_{k_1=1}^{n}(-1)^{k_1+l} x_1\cdots\widehat{x_{k_1}}\cdots x_n\times\\
&\times\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \widehat{1} & \cdots & 1\\ x_1^2 & \cdots & \widehat{x_{k_1}}^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{x_1^{l-1}} & \cdots & \widehat{x_{k_1}^{l-1}} & \cdots & \widehat{x_n^{l-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^n & \cdots & \widehat{x_{k_1}^n} & \cdots & x_n^n\end{vmatrix} \overset{(3.3)}{=}\\
&|\delta| x_1 \ldots x_n\, e_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) + y\sum_{k_1=1}^{n}(x_1\ldots\widehat{x_{k_1}}\ldots x_n)^3|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|(-1)^{k_1}+\\
&+\sum_{l=3}^{n+1} y^l \sum_{k\in U_{n,2}}(x_1\ldots\widehat{x_{k_1}}\ldots x_n)e_{n-l+1}(x_1,\ldots,\widehat{x_{k_1}},\ldots,\widehat{x_{k_2}},\ldots,x_n)\times\\
&\times(-1)^{l+k_1+k_2+I(\pi)_2}(x_1\ldots\widehat{x_{k_1}}\ldots\widehat{x_{k_2}}\ldots x_n)^2|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Le facteur $(-1)^{I(\pi)_2+1}$ provient de rénumeration de l'indice de summation.

Par développement de Ξ_2 par rapport à la colonne 1 nous obtenons

$$
\Xi_2 = |\delta| x_1 \ldots x_n\, e_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) - y|\widehat{\epsilon_{1,2}}| + \sum_{l=3}^{n+1}(-1)^{l+1}y^l|\widehat{\epsilon_{2,l}}|. \tag{3.8}
$$

Maintenant, le théorème suit par l'égalisation des coefficients de y^l. ■

Puis il nous faut démontrer le lemme suivant par induction.

Lemme 3.4. Soit $1 \leq l \leq n+1$. Donc

$$\Xi_l = \sum_{k_1=0}^{l-1} y^{k_1}(-1)^{k_1}\theta(n,k_1,l) + \sum_{k_1=l+1}^{n+1} y^{k_1}(-1)^{k_1+1}\theta(n,l,k_1). \tag{3.9}$$

Preuve. Le lemme est vrai pour $l = 1$ grace à (2.17) et (3.4) et pour $l = 2$ grace à (2.16), (2.17) et (3.8). Admettons que l'hypothèse de l'récurrence soit vraie pour Ξ_{l-1}.

$$\Xi_{l-1} = \sum_{k_1=0}^{l-2} y^{k_1}(-1)^{k_1}\theta(n,k_1,l-1) + \sum_{k_1=l}^{n+1}(-1)^{k_1+1}y^{k_1}\theta(n,l-1,k_1). \tag{3.10}$$

D'autre part, l'expansion de Ξ_{l-1} par rapport à la colonne 1 donne

$$\begin{aligned}\Xi_{l-1} &= |\delta| x_1 \ldots x_n \, e_{n-l+2}(x_1,\ldots,x_n) \\ &+ \sum_{k_1=1}^{l-2}(-1)^{k_1}y^{k_1}|\widehat{\epsilon_{k_1,l-1}}| + \sum_{k_1=l}^{n+1}(-1)^{k_1+1}y^{k_1}|\widehat{\epsilon_{l-1,k_1}}|.\end{aligned} \tag{3.11}$$

L'égalisation des coefficients pour y^{k_1} des deux dernières equations donne d'abord (2.16) et (3.3), puis pour $1 < k_1 < l-1$

$$|\widehat{\epsilon_{k_1,l-1}}| = \theta(n,k_1,l-1), \tag{3.12}$$

et enfin pour $l-1 < k_1 < n+2$

$$|\widehat{\epsilon_{l-1,k_1}}| = \theta(n,l-1,k_1). \tag{3.13}$$

La vérification de l'hypothèse de l'récurrence est achevée par l'expansion de Ξ_l par rapport à la ligne 1.

$$\Xi_l = (x_1 \ldots x_n)|n,n-1,\ldots,l,l-2,\ldots,1,0| +$$

$$+ \sum_{k_2=1}^{n}(-1)^{k_2}\begin{vmatrix} y & x_1 & \cdots & \widehat{x_{k_2}} & \cdots & x_n \\ y^2 & x_1^2 & \cdots & \widehat{x_{k_2}^2} & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{y^l} & \widehat{x_1^l} & \cdots & \widehat{x_{k_2}^l} & \cdots & \widehat{x_n^l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{n+1} & x_1^{n+1} & \cdots & \widehat{x_{k_2}^{n+1}} & \cdots & x_n^{n+1}\end{vmatrix}.$$

Développons le dernier déterminant par rapport à la colonne 1 et employons (3.3), (3.12) et (3.13).

$$\Xi_l = \sum_{k_1=0}^{1} y^{k_1}(-1)^{k_1}\theta(n,k_1,l) + \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=2}^{l-1}(-1)^{k_2+k_1+1}y^{k_1} \times$$

$$\times x_1\cdots\widehat{x_{k_2}}\cdots x_n\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \widehat{1} & \cdots & 1\\ x_1 & \cdots & \widehat{x_{k_2}} & \cdots & x_n\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{x_1^{k_1-1}} & \cdots & \widehat{x_{k_2}^{k_1-1}} & \cdots & \widehat{x_n^{k_1-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{x_1^{l-1}} & \cdots & \widehat{x_{k_2}^{l-1}} & \cdots & \widehat{x_n^{l-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^n & \cdots & \widehat{x_{k_2}^n} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}+\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=l+1}^{n+1}$$

$$(-1)^{k_2+k_1}y^{k_1}x_1\cdots\widehat{x_{k_2}}\cdots x_n\times\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \widehat{1} & \cdots & 1\\ x_1 & \cdots & \widehat{x_{k_2}} & \cdots & x_n\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{x_1^{l-1}} & \cdots & \widehat{x_{k_2}^{l-1}} & \cdots & \widehat{x_n^{l-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{x_1^{k_1-1}} & \cdots & \widehat{x_{k_2}^{k_1-1}} & \cdots & \widehat{x_n^{k_1-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^n & \cdots & \widehat{x_{k_2}^n} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{1}y^{k_1}(-1)^{k_1}\theta(n,k_1,l)+\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=2}^{l-1}(-1)^{k_2+1+k_1}\times$$

$$\times y^{k_1}x_1\cdots\widehat{x_{k_2}}\cdots x_n\theta(n-1,k_1-1,l-1)(x_1,\ldots,\widehat{x_{k_2}},\ldots,x_n)+$$

$$+\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=l+1}^{n+1}(-1)^{k_2+k_1}y^{k_1}x_1\cdots\widehat{x_{k_2}}\cdots x_n\times$$

$$\times\theta(n-1,l-1,k_1-1)(x_1,\ldots,\widehat{x_{k_2}},\ldots,x_n)=\sum_{k_1=0}^{l-1}y^{k_1}(-1)^{k_1}\theta(n,k_1,l)+$$

$$+\sum_{k_1=l+1}^{n+1}y^{k_1}(-1)^{k_1+1}\theta(n,l,k_1).$$

■

Immédiatement, nous obtenons un théorème général pour un DGC avec $\lambda_1=2$.

Théorème 3.5. Soit $0<l_1<l_2<n+1$. Donc

$$|\widehat{\epsilon_{l_1,l_2}}|=\theta(n,l_1,l_2). \tag{3.14}$$

Preuve. Cela suit de (3.12) ou (3.13). ■

4. DGC général

Maintenant, nous démontrerons une équation pour un DGC général. Cette équation sera une généralisation naturelle du Théorème 3.5. Le théorème principal définit une relation d'équivalence E de la quantité de tous les DGC

Définition 4.1. Soit n le nombre des variables dans les DGC, et soit λ la partition $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ des nombres entiers non négatifs décroissants.

La classe d'équivalence E_{n+s,l_{s-1},l_s} est définie par les trois critères suivantes:

1. La puissance la plus haute dans le déterminant est $n + s - 1$, une constante.
2. $l_s(\lambda)$ et $l_{s-1}(\lambda)$ sont constants.
3. $$\sum_{j=1}^{l_{s-1}-s+2} b_{j,l_{s-1}-s+2,s-2} = l_{s-1} + 1, \tag{4.1}$$

   où $b_{j,l_{s-1}-s+2,s-2}$ est défini par (2.7)–(2.8).

Définition 4.2. Une orbite dans une classe d'équivalence E_{n+s,l_{s-1},l_s} est une suite d'éléments $E(s)$ avec des valeurs augmentantes de s, commençant avec $s = 2$. Si, dans $E(s)$, les exposants $0 < l_1 < \cdots < l_s < n + s - 1$ manquent, $E(s+1)$ est obtenu de $E(s)$ par l'élimination d'un exposant l, où $0 < l < l_1$. Donc, $E(s+1)$ a des exposants manquants $0 < l'_1 < l'_2 < \ldots, < l'_{s+1}$, où

$$l'_1 = l,\ l'_j = l_{j-1}, j = 2, \ldots, s+1 \tag{4.2}$$

Définition 4.3. Pour chaque orbite dans E_{n+s,l_{s-1},l_s} nous définissons un ordre par

$$E(s_1) > E(s_2) \quad \text{si} \quad s_1 > s_2.$$

Maintenant, nous pouvons enfin donner quelques exemples qui montrent la manière de calculer le $b_{j,t,u}$. Dans chaque exemple nous restons dans la même orbite.

Exemple 4.4. Afin de calculer les b pour le déterminant défini par $\lambda = (5, 5, 0)$ nous nous déplaçons dans la direction positive à partir du déterminant défini par
$\lambda = (2, 2, 0, 0, 0, 0)$, qui a $u = 0$, et les b sont donnés par (2.12). Déplaçons à $\lambda = (3, 3, 0, 0, 0)$, qui a $b_{1,3,1} = 1$, $b_{2,3,1} = 1$, $b_{3,3,1} = 3$. Déplaçons à $\lambda = (4, 4, 0, 0)$, qui a $b_{1,2,2} = 1$, $b_{2,2,2} = 4$. Et, enfin, déplaçons à $\lambda = (5, 5, 0)$, qui a $b_{1,1,3} = 5$.

Exemple 4.5. Afin de calculer les b pour le déterminant défini par $\lambda = (4, 2, 0)$ nous nous déplaçons dans la direction positive à partir du déterminant défini par $(2, 0, 0, 0, 0)$, qui a $u = 0$, et les b sont donnés par (2.12). Déplaçons à $\lambda = (3, 1, 0, 0)$, qui a $b_{1,3,1} = 1$, $b_{2,3,1} = 2$, $b_{3,3,1} = 2$. Et, enfin, déplaçons à $\lambda = (4, 2, 0)$, qui a $b_{1,2,2} = 3$, $b_{2,2,2} = 2$.

Exemple 4.6. Nous donnons un exemple de trois orbites différentes dans $E_{8,4,5}$. Nous décrivons chaque orbite par une suite des partitions.
Orbite 1:

$$(2,2,0,0,0,0),(3,3,0,0,0),(4,4,0,0),(5,5,0).$$

Orbite 2:

$$(2,2,0,0,0,0),(3,3,1,0,0),(4,4,2,0).$$

Orbite 3:

$$(2,2,0,0,0,0),(3,3,1,1,0).$$

On peut déplacer toutes les orbites à $(5,5,0)$, l'élément final de la première orbite, par des manipulations du déterminant, mais c'est seulement la première orbite qui suit le procédé de la preuve du théorème principal.

Le lemme suivant est nécessaire pour la preuve du théorème principal.
Lemme 4.7. Soit $1 \leq m \leq s-2$. Nous voulons comparer les permutations $I(\pi)_{l_{s-1-m}}$ où $\pi = (k_1, \ldots, k_{l_{s-1-m}})$ et $I(\pi)_{l_{s-1}+1-m}$, où nous avons adjoint un extra

$$k_{J+1} = n+s-1-m, \tag{4.3}$$

dépendant de la restriction suivante

$$l_{s-1-m} = \sum_{h=1}^{J} b_{h,l_{s-1}+1-m,m-1}. \tag{4.4}$$

C'est supposé que les $\mathbf{k}$ ont les mêmes valeurs dans le $l_{s-1}+1-m$-tuple étendu sauf la permutation induite par (4.3). La valeur maximale de k_i est $n+s-2-m$. Donc, nous obtenons l'équation suivante

$$(-1)^{\binom{l_{s-1}+1-m}{2}+I(\pi)_{l_{s-1-m}}} = (-1)^{\binom{l_{s-1}+2-m}{2}+I(\pi)_{l_{s-1}+1-m}+l_{s-1-m}-1}. \tag{4.5}$$

Preuve. Nous observons que

$$(-1)^{I(\pi)_{l_{s-1-m}}} \equiv \delta + (-1)^{I(\pi)_{l_{s-1}+1-m}} \text{ mod } 2 \tag{4.6}$$

si

$$J+1 \equiv \delta + l_{s-1}+1-m \text{ mod } 2, \tag{4.7}$$

où $\delta \in \{0,1\}$, et une simplification montre qu'il nous faut démontrer que

$$J \equiv l_{s-1-m} \text{ mod } 2. \tag{4.8}$$

Mais la dernière équation provient de (4.4). ■

Maintenant, nous sommes prêts à démontrer le théorème principal de cet article.

Théorème 4.8. Soient n le nombre des variables et σ le nombre des exposants manquants dans $|\widehat{\epsilon_{l_1,\ldots,l_\sigma}}|$.

Alors,

$$|\widehat{\epsilon_{l_1,\ldots,l_\sigma}}| = \Theta_\lambda(e). \tag{4.9}$$

Preuve. Nous nous déplaçons dans l'orbite dans $E_{n+\sigma,l_{\sigma-1},l_\sigma}$, qui finit dans $|\widehat{\epsilon_{l_1,\ldots,l_\sigma}}|$.

Nous introduisons une 'variable de récurrence' m, qui va de 0 à $\sigma-2$. Chaque fois que nous nous déplaçons de $E(s)$ à $E(s+1)$, m augmente par un, le nombre des variables dans le nouveau déterminant descend par un et l'exposant du monôme extrait descend.

L'hypothèse de récurrence est vrai pour $m=0$ par le Théorème 3.5.

Admettons que le théorème soit vrai pour $m-1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+\sigma-1-m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l_{\sigma-m}}} & \cdots & \widehat{x_{n+\sigma-1-m}^{l_{\sigma-m}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l_\sigma}} & \cdots & \widehat{x_{n+\sigma-1-m}^{l_\sigma}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n+\sigma-1} & \cdots & x_{n+\sigma-1-m}^{n+\sigma-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\binom{l_{\sigma-1}+2-m}{2}} \sum_{\mathbf{k}\in U_{n+\sigma-1-m,l_{\sigma-1}+1-m}} \tag{4.10}$$
$$\prod_{j=1}^{l_{\sigma-1}+1-m} \left(x_1 \ldots \prod_{i=1}^{j} \widehat{x_{k_i}} \ldots x_{n+\sigma-1-m} \right)^{b_{j,l_{\sigma-1}+1-m,m-1}} \times$$
$$\times\, e_{n-l_\sigma+\sigma-1}(x_1,,\ldots,\widehat{x_{k_1}},\ldots,\widehat{x_{k_{l_{\sigma-1}+1-m}}},\ldots,x_{n+\sigma-1-m})\times$$
$$\times\,(-1)^{k_1+\ldots+k_{l_{\sigma-1}+1-m}+I(\pi)_{l_{\sigma-1}+1-m}}|\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|.$$

Une expansion du même déterminant par rapport à la dernière colonne donne

$$\sum_{l=0}^{l_{\sigma-1-m}} (-1)^{n+\sigma-m+l} x_{n+\sigma-1-m}^{l} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+\sigma-2-m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l}} & \cdots & \widehat{x_{n+\sigma-2-m}^{l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l_\sigma}} & \cdots & \widehat{x_{n+\sigma-2-m}^{l_\sigma}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n+\sigma-1} & \cdots & x_{n+\sigma-2-m}^{n+\sigma-1} \end{vmatrix} + \tag{4.11}$$
$$+\, G(x_{n+\sigma-1-m}),$$

où $G(x_{n+\sigma-1-m})$ sont les termes de $x_{n+\sigma-1-m}$ de l'ordre $l_{\sigma-1-m}+1$ et plus haut.

Maintenant, il nous faut choisir les termes qui contiennent $x_{n+\sigma-1-m}^{l_{\sigma-1-m}}$ de (4.10), c'est à dire qu'il nous faut résoudre l'équation

$$l_{\sigma-1-m} = \sum_{h=1}^{J} b_{h,l_{\sigma-1}+1-m,m-1} \tag{4.12}$$

pour J. Cela impliques que

$$k_{J+1} = n + \sigma - 1 - m. \tag{4.13}$$

Puis, les b dans le nouveau déterminant ont les valeurs suivantes, ce qui suit de (4.13).

$$b_{j,l_{\sigma-1}-m,m} = b_{j,l_{\sigma-1}+1-m,m-1},\ 1 \leq j \leq J-1 \tag{4.14}$$

$$b_{J,l_{\sigma-1}-m,m} = b_{J,l_{\sigma-1}+1-m,m-1} + b_{J+1,l_{\sigma-1}+1-m,m-1} \tag{4.15}$$

$$b_{j,l_{\sigma-1}-m,m} = b_{j+1,l_{\sigma-1}+1-m,m-1},\ J+1 \leq j \leq l_{\sigma-1} - m. \tag{4.16}$$

Dans le cas spécial $m = 1$,

$$\begin{aligned} &b_{1,l_{\sigma-1}-1,1} = 1, \ldots, b_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-1}-1,1} = 2, b_{l_{\sigma-2}+1,l_{\sigma-1}-1,1} = 1, \\ &, \ldots, b_{l_{\sigma-1}-2,l_{\sigma-1}-1,1} = 1, b_{l_{\sigma-1}-1,l_{\sigma-1}-1,1} = 2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Si $l_{\sigma-2} + 1 = l_{\sigma-1}$, le dernier terme sera $b_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-1}-1,1} = 3$.

Pour accomplir cela nous mettons $k_{l_{\sigma-2}+1} = n + \sigma - 2$ suivi par la suppression de l'indice k_j, résultant de la rénumération des k.

Par l'égalisation des (4.10) et (4.11) , l'élimination du facteur $(-1)^{n+\sigma-m+l_{\sigma-1-m}}$ et l'égalisation des coefficients de $x_{n+\sigma-1-m}^{l_{\sigma-1-m}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+\sigma-2-m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l_{\sigma-m-1}}} & \cdots & \widehat{x_{n+\sigma-2-m}^{l_{\sigma-m-1}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_1^{l_\sigma}} & \cdots & \widehat{x_{n+\sigma-2-m}^{l_\sigma}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n+\sigma-1} & \cdots & x_{n+\sigma-2-m}^{n+\sigma-1} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{\binom{l_{\sigma-1}+2-m}{2}+n+\sigma-m+l_{\sigma-1-m}} \sum_{\mathbf{k} \in U_{n+\sigma-2-m,l_{\sigma-1}-m}} \\ &\prod_{j=1}^{l_{\sigma-1}-m} \left(x_1 \ldots \prod_{i=1}^{j} \widehat{x_{k_i}} \ldots x_{n+\sigma-2-m} \right)^{b_{j,l_{\sigma-1}-m,m}} \times \\ &\times e_{n-l_\sigma+\sigma-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_{k_1}}, \ldots, \widehat{x_{k_{l_{\sigma-1}-m}}}, \ldots, x_{n+\sigma-2-m}) \times \\ &\times (-1)^{k_1+\ldots+k_{l_{\sigma-1}-m}+(n+\sigma-1-m)+I(\pi)_{l_{\sigma-1}+1-m}} |\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Par le Lemme 4.7, le dernier déterminant est égal à

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\binom{l_{\sigma-1}+1-m}{2}} \sum_{\mathbf{k}\in U_{n+\sigma-2-m,l_{\sigma-1}-m}} \\
&\prod_{j=1}^{l_{\sigma-1}-m} \left(x_1 \dots \prod_{i=1}^{j} \widehat{x_{k_i}} \dots x_{n+\sigma-2-m} \right)^{b_{j,l_{\sigma-1}-m,m}} \times \\
&\times e_{n-l_\sigma+\sigma-1}(x_1, \dots, \widehat{x_{k_1}}, \dots, \widehat{x_{k_{l_{\sigma-1}-m}}}, \dots, x_{n+\sigma-2-m}) \times \\
&\times (-1)^{k_1+\dots+k_{l_{\sigma-1}-m}+I(\pi)_{l_{\sigma-1}-m}} |\widehat{\delta_{\mathbf{k}}}|.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Maintenant, mettons $m = \sigma - 2$ afin d'obtenir l'équation (4.9). ■

5. Discussion

Puisque le suject contient des résultats de plusieurs auteurs, nous ajouterons plus de références des autres résultats et nous discuterons les relations et les differences entre eux et le résultats présenté de l'auteur, afin de montrer son originalité et d'expliquer son applicabilité.

Soit k la puissance la plus haute dans $|\lambda+\delta|$. Dans l'année 1929 E. R. Heineman [11, p.474] donnait une autre expression d'un déterminant généralisé de Cauchy exprimée comme un quotient d'un certain déterminant et $|\delta|^{k-n}$.

En 1933, A. Dresden [5] donnait une autre formule, en exprimant DGC par les sommes de tous les polynôme symétriques d'un degré donné. Il paraît que le résultat de l'auteur présent serait mieux, puisqu'il est seulement basé sur les polynômes symétriques élémentaires.

Le $\Theta_\lambda(e)$, où λ court à travers toutes les partitions de la longeur de $\leq n$, forme une base du $\mathbb{Z}$-module A_n des polynômes anti-symétriques dans $x_1, \dots, x_n$ [17, p. 40]. Précisement comme pour la fonction de Schur, λ détermine Θ complètement et le nombre des variables est égal au nombre des parts dans λ. Si nous changeons l'e dans (2.15) en p (sommes de puissances) ou en h (polynômes symétrique complètes), nous obtenons des autres polynômes anti-symétrique et une étude de leurs caractères serait l'objet d'un autre article.

Les définitions suivantes de fonctions de Schur sont très connu, voir Stanley [27].

1. Comme la fonction génératrice de tableaux standard;
2. Comme le quotient de $|\lambda + \delta|$ et $|\delta|$;
3. Par l'identité de Jacobi–Trudi
$$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}; \tag{5.1}$$
4. Par l'équation de Nägelsbach [20]
$$s_\lambda = \det\left(e_{\lambda'_i-i+j}\right)_{1\leq i,j\leq l(\lambda')}. \tag{5.2}$$

La formule suivante [6] est équivalente de la formule de Nägelsbach–Kostka (5.2).

Théorème 5.1. Soit $\mathbf{k} = (k_0, \ldots, k_{s-1})$ la quantité de toutes les permutations de $(0, \ldots, s-1)$, et soit λ une partition donnée. Nous admettons que nos polynômes symétriques sont des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$. Donc

$$s_\lambda = \sum_{\mathbf{k}} (-1)^{\binom{s}{2}+I(\pi)_s} \prod_{t=0}^{s-1} e_{n+k_t-l_{s-t}}. \tag{5.3}$$

Cette formule exprime aussi la matrice de transition entre s_λ et e_λ. Cela a été donnée en quelques cas spéciaux dans Kostka [15, p. 118–120].

La formule (5.3) a quelques similarités du théorème principal (4.9). Le facteur $(-1)^{I(\pi)}$ surgit dans tous les deux et cela est tout à fait naturel, puisque nous nous occupons de la combinatoire.

References

[1] A.O. Barut, R. Raczka. Theory of group representations and applications, World Scientific, 1986.

[2] A.L. Cauchy. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. Oevres complètes, série 2, tome 1, 91–169, *Journal de l'École polytechnique,* XVIIe cahier, Tome X, 29–112, 1815.

[3] J. Demmel. Accurate singular value decompositions of structured matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.,* 21(2):562–580, 1999.

[4] L.A. Dickey. Lectures on classical W-algebras, Kluwer 1997.

[5] A. Dresden. On the generalized Vandermonde determinant and symmetric functions, *Bull. Am. Math. Soc.*, 39:443–449, 1933.

[6] T. Ernst. The history of q-calculus and a new method. Uppsala 2000.

[7] J. Fuchs. Affine Lie Algebras and quantum groups, Cambridge, 1992.

[8] D.M. Goldschmidt. Group characters, symmetric functions and the Hecke algebra, AMS 1993.

[9] W.J. Gilbert. Modern algebra with applications, Wiley 1976.

[10] R.W. Haase, N.F. Johnson. Schur function analysis of the unitary discrete series representations of the noncompact symplectic group, *J. Phys. A*, 26(7):1663–1672, 1993.

[11] E.R. Heinemann. Generalized Vandermonde determinants, *Trans. Am. Math. Soc.*, 31:464–476, 1929.

[12] M. Ishikawa, M. Wakayama. New Schur function series. *J. Algebra,* 208(2):480–525, 1998.

[13] E. Kaltofen, L. Yagati. Improved sparse multivariate polynomial interpolation algorithms, *Symbolic and Algebraic Computation*, (Rome, 1988), 467–474, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 358, Springer, Berlin, 1989.

[14] N. Kawanaka. A q-series identity involving Schur functions and related topics, *Osaka J. Math.*, 36:157–176, 1999.

[15] C. Kostka. Über den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen, *J. für Math.*, 93:89–123, 1882.

[16] A. Lascoux, P. Pragacz. Ribbon Schur functions, *European J. combinatorics*, 9:561–574, 1988.

[17] I.G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford, 1995.

[18] M. Maliakas. On Odd Symplectic Schur Functions, *J. Algebra*, 211(2):640–646, 1999.

[19] T. Muir. A treatise on the theory of determinants, Revised and enlarged by William H. Metzler Dover Publications, Inc., New York 1960.

[20] Nägelsbach, Über eine Klasse symmetrischer Functionen, Zweibrücken, 1871.

[21] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi, and T. Tokihiro. An elementary introduction to Sato theory, Recent developments in soliton theory. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, 94:210–241, 1988.

[22] G. Polya, G. Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Band II, Springer-Verlag, Berlin-New York, pp. xii+407, 1971.

[23] R.A. Proctor, D.C. Wilson. Interpretation of a basic hypergeometric identity with Lie characters and Young tableaux, *Discrete Math.*, 137(1-3):297–302, 1995.

[24] G. Robinson. Representation theory of the symmetric group, University of Toronto press, 1961.

[25] T. Scharf, J.Y. Thibon, and B.G. Wybourne. Powers of the Vandermonde determinant and the quantum Hall effect, *J, Phys. A.*, 27:4211–4219, 1994.

[26] B. Simon. Representation theory of finite and compact groups, AMS, 1996.

[27] R. Stanley. *Enumerative combinatorics*. Vol. 2. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[28] M.H. Stone. Schur functions, chiral bosons, and the quantum-Hall-effect edge states. *Phys. Rev. B*, 42:8399–8404, 1990.

[29] G.P. Thomas. Baxter algebras and Schur functions, Dissertation, Swansea 1974.

[30] N. Trudi. Intorno ad un determinante piu generale di quello della radici delle equazioni ed alle funzioni omogenee complete di questi radici. *Giornale* II (1864), p. 152.

[31] K. Ueno. Lattice path proof of the ribbon determinant formula for Schur functions, *Nagoya Math. J.*, 124:55–59, 1991.

[32] R. Vein, P. Dale. Determinants and their applications in mathematical physics. *Applied Mathematical Sciences*, 134. Springer-Verlag, New York, 1999.

[33] H. Weyl. *The Classical groups*, Princeton 1939.

[34] D.P. Zelobenko. Compact Lie groups and their representations, AMS, 1973.